

Mirna Gržanić
mirna.grzanic@fer.hr
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Tomislav Capuder
tomislav.capuder@fer.hr

Matija Zidar
matija.zidar@fer.hr

KONVEKSNI OPTIMIZACIJSKI MODELI ZA POGON I PLANIRANJE NAPREDNIH DISTRIBUCIJSKIH MREŽA

SAŽETAK

Integracijom sve većeg broja upravljivih elektroenergetskih elemenata na lokacijama krajnjih korisnika, distribucijske mreže postaju potencijalni aktivni sudionik u radu elektroenergetskog sustava. S druge strane, takav pristup zahtjeva i nove modele upravljanja i planiranja distribucijskih mreža. Jedan od glavnih izazova je definirati na koji način ti novi distribuirani izvori fleksibilnosti, kao što su upravljivi potrošači, električna vozila i spremnici energije, utječu na distribucijsku mrežu te postoji li način na koji operator sustava može angažirati takve izvore kako bi učinkovitije vodio i planirao distribucijski sustav.

U radu će biti opisani i analizirani optimizacijski modeli kojima bi takvo vođenje i planiranje mreže bilo moguće. Modeli će biti temeljeni na konveksnim optimizacijskim principima, što znači da će uvijek garantirati globalno optimalno rješenje za razliku od, primjerice, modela temeljenih na heurističkim metodama. Detaljnom razradom i objašnjenjima biti će pokazano kako se od nekonveksnog modela optimalnih izmjeničnih tokova snaga može relaksacijama matematičkih ograničenja kreirati izravni, konveksni model naprednih distribucijskih mreža.

Ključne riječi: distribucijska mreža, konveksna optimizacija, distribuirani izvori fleksibilnosti

CONVEX OPTIMIZATION FOR ACTIVE DISTRIBUTION NETWORK MANAGEMENT

SUMMARY

Due to broad integration of controllable devices in distribution network, a possibility arises for distribution system operator to become an active participant in electric power system management. Flexibility sources, such as demand response, energy storage and electric vehicles require different approach from the one that is used nowadays in distribution network control and operation. Distribution system operator goal is to effectively manage the system in the presence of flexibility sources.

The work proposed herein will describe and analyze convex optimization for modeling active distribution network management. Unlike heuristics models, models based on convex relaxation always guarantee global optimal solution. It will be discussed how AC power flow nonconvex equations are relaxed and used for calculating optimal power flow in distribution system.

Key words: active distribution network management, convex optimization, flexibility sources

1. UVOD

Sve veći utjecaj klimatskih promjena uzrokovanih stakleničkim plinovima kao posljedica izgaranja fosilnih goriva u proizvodnji električne energije potaknuo je države članice Europske unije na povećanje udjela obnovljivih izvora energije u ukupnoj proizvodnji na 20% do 2020. godine. Obnovljivi izvori energije koriste jeftino (besplatno) gorivo (vodu, sunce, vjetar, biomasu, geotermalnu energiju) i ne zagađuju okoliš te je zbog toga značajan porast proizvodnje iz tih izvora. Varijabilna proizvodnja sve većeg broja obnovljivih izvora energije uzrokuje povećanje potrebe za dodatnom fleksibilnošću u sustavu. Gledano na distribucijskoj razini, tu dodatnu fleksibilnost mogu pružiti spremnici energije, električna vozila i upravljiva potrošnja. Novi izvori fleksibilnosti zahtijevaju i drugačiji način vođenja distribucijske mreže [1].

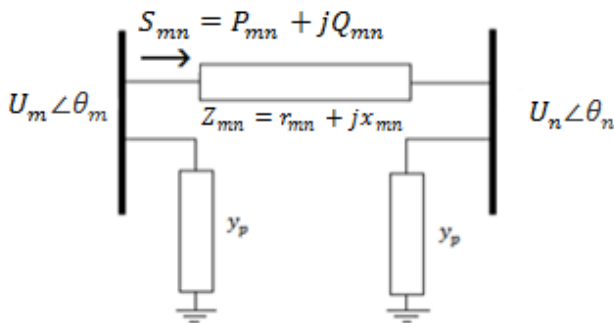
Do sada je operator sustava vodio distribucijsku mrežu načelom „Fit and forget“. Mreža se predimenzionirala na način da se testiraju svi mogući scenariji i konstruira dovoljno jaka mreža koja može podnijeti sve kritične slučajeve bez pojave zagušenja u sustavu ili nedozvoljenih kolebanja napona. Takav način vođenja mreže bio je moguć zbog radijalnog izgleda distribucijske mreže i jednosmjernog tijeka snage (od transformatorske stanice preko koje se distribucijska mreža napaja pa sve do krajnjih potrošača). Daljnje vođenje mreže na takav način uzrokovalo bi znatne troškove pojačanje mreže zbog pojave reverznih tokova snaga (od distribucijske mreže prema prijenosnoj).

Ugradnja distribuiranih izvora u blizini velike potrošnje može znatno umanjiti gubitke i popraviti naponske prilike u mreži, ali ukoliko se distribuirani izvori nađu u slabo opterećenom području, dolazi do reverznih tokova snaga prema prijenosnoj mreži i postoji opasnost od preopterećenja transformatorske stanice koja povezuje distribucijsku i prijenosnu mrežu.

Zbog navedenih razloga uvodi se tzv. „Active Distribution Network Management“ (ADNM) koji se temelji na optimiziranom pogonu distribucijske mreže koji zadovoljava sva ograničenja u sustavu. Cilj operatora distribucijskog sustava je osigurati optimalan pogon distribucijske mreže, uz minimizaciju gubitaka [2-5], minimizaciju troškova pogona [6-9], tzv. „peak shaving“ [10-12], kontrolu napona [13-16], maksimizacija proizvodnje obnovljivih izvora [2], [17], kontrolu frekvencije [10-11], [18].

2. PRORAČUN TOKOVA SNAGA

Na slici 1 prikazan je π model voda:



Slika 1 π model voda

Prividna snaga na vodu S_{mn} je kompleksna varijabla koja se sastoji od realnog dijela (djelatne snage P_{mn}) i imaginarnog dijela (jalove snage Q_{mn}) pri čemu je j imaginarna jedinica.

Naponi su kompleksne varijable pri čemu su $U_m \angle \theta_m$, $U_n \angle \theta_n$ amplitude i kutevi napona na čvorištima m i n . Izraženo u polarnom obliku: $U_m \cos \theta_m + jU_m \sin \theta_m$. Ukoliko je napon (ili bilo koja druga varijabla/konstanta) u izrazima predstavljen s U_m , riječ je o kompleksnoj varijabli, ali se zbog jednostavnosti zapisa izostavlja kut. Z_{mn} je kompleksna konstanta koja predstavlja impedanciju voda između čvorišta m i n koja se sastoji od radnog otpora r_{mn} i reaktancije voda x_{mn} . Admitancija voda Y_{mn} jednaka je (1):

$$Y_{mn} = \frac{1}{Z_{mn}} = \frac{1}{r_{mn} + jx_{mn}} = \frac{r_{mn} - jx_{mn}}{r_{mn}^2 + x_{mn}^2} = g_{mn} - jb_{mn} \quad (1)$$

pri čemu se admitancija sastoji od kondukcije g_{mn} (2):

$$g_{mn} = \frac{r_{mn}}{r_{mn}^2 + x_{mn}^2} \quad (2)$$

i susceptancije b_{mn} (3):

$$b_{mn} = \frac{x_{mn}}{r_{mn}^2 + x_{mn}^2} \quad (3)$$

y_p je poprečna admitancija voda.

Struja na vodu I_{mn} može se definirati (4):

$$I_{mn} = (U_m - U_n) \cdot Y_{mn} \quad (4)$$

Prividna snaga na vodu S_{km} jednaka je (5) pri čemu * označava kompleksno konjugiranu varijablu:

$$S_{mn} = U_m \cdot I_{mn}^* = U_m \cdot (U_m - U_n)^* \cdot Y_{mn}^* \quad (5)$$

Sređivanjem (5) dobiva se (6):

$$S_{mn} = (g_{mn} + jb_{mn}) \cdot (U_m^2 - U_m U_n \cos(\theta_m - \theta_n) - jU_m U_n \sin(\theta_m - \theta_n)) \quad (6)$$

3. DC APROKSMACIJA U PRIJENOSNOJ MREŽI

Distribucijska mreža razlikuje se od prijenosne u brojnim karakteristikama te je zbog toga i drugačiji način vođenja. U prijenosnoj mreži moguće je u izračunima koristiti aproksimativni DC model u kojem je jalova snaga zanemarena. Radni otpor r_{mn} , u odnosu na reaktanciju je znatno manji, te je stoga zanemarin. Zbog toga je zanemarena i kondukcija voda g_{mn} . Amplitude napona u prijenosnoj mreži ne odstupaju značajno od nazivnog napona, a s obzirom na to da je modelu riječ o *per unit* metodi, vrijednosti amplitude napona aproksimirane su na 1 p.u. Razlika između kuteva napona je mala te se sinus razlike kuteva napona može aproksimirati razlikom kuteva napona. Izraz za djelatnu snagu na vodu je linearan i ne predstavlja kao takav nikakve poteškoće u računalnom modeliranju.

Točan izraz koji predstavlja radnu snagu na vodu P_{mn} počevši od čvorišta m prema čvorištu n je (7):

$$P_{mn} = g_{mn}U_m^2 - g_{mn}U_m U_n \cos(\theta_m - \theta_n) + b_{mn}U_m U_n \sin(\theta_m - \theta_n) \quad (7)$$

može se aproksimirati izrazom (8):

$$P_{mn} = b_{mn}(\theta_m - \theta_n) \quad (8)$$

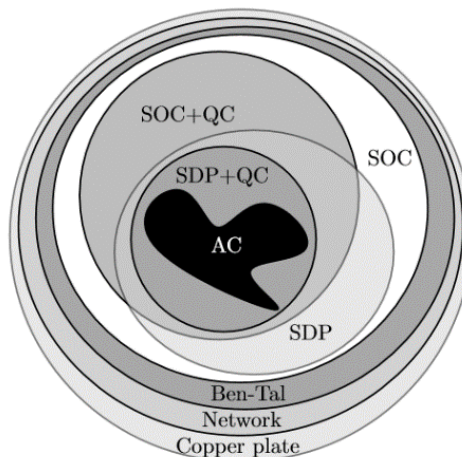
4. DISTRIBUCIJSKA MREŽA

Problem se javlja u distribucijskoj mreži u kojoj ne možemo uvesti navedena pojednostavljenja, tj. aproksimacije. Karakteristike distribucijske mreže su znatno drugačije od prijenosne. Red veličine radnog otpora jednak je reaktanciji te je u izrazima potrebno zadržati kondukciju voda. S obzirom na radijalan izgled mreže, javljaju se značajniji padovi napona na krajnjim čvorištima u sustavu te se naponi ne mogu aproksimirati na 1 p.u. Jalova snaga je potrebna za regulaciju napona te se uz djelatnu snagu na vodu (7), javlja i jalova snaga Q_{mn} (9):

$$Q_{mn} = -g_{mn}U_m U_n \sin(\theta_m - \theta_n) + b_{mn}U_m^2 - b_{mn}U_m U_n \cos(\theta_m - \theta_n) \quad (9)$$

Izrazi (7) i (9) predstavljaju nekonveksne funkcije koje je nemoguće riješiti današnjim optimizacijskim alatima. Rješenja dobivena aproksimativnim metodama u distribucijskoj mreži ne

zadovoljavaju ograničenja početnog neaproksimiranog problema. Uvode se postupci relaksacije koji proširuju zadana početna ograničenja i pri tome nekonveksne jednadžbe postaju konveksne i moguće ih je riješiti (Slika 2). U postupku se zatim provjerava je li rješenje relaksiranog problema ujedno i rješenje početnog problema. Ako nije, dobiveno rješenje relaksiranog problema predstavlja donju granicu za rješenje originalnog problema. Originalni problem je riješiv ako i samo ako je riješiv i relaksirani problem.



Slika 2 Proširenje područja ograničenja AC modela [19]

5. AC RELAKSACIJE TOKOVA SNAGA U DISTRIBUCIJSKOJ MREŽI

Brojne su relaksacije koje AC model mreže čine konveksnim, a time i rješivim [19-25]. Ben-Tal, Network i Copper plate [26-27] su linearne relaksacije i znatno proširuju područje rješenja i ne garantiraju optimalno rješenje. *Second Order Cone Programming* relaksacija (SOCP) prvi je put predstavljena u [28]. *Semidefinite Programming* SDP relaksacija javlja se u [29] i 30]. [31-33] pokazuju egzaktnost relaksacija za radialne mreže.

6. MODELI

Postoji više formulacija modela koje opisuju proračun tokova snaga u mreži. Daju jednaka rješenja, ali koriste drugačije varijable.

6.1. Bus Injection Model

Bus Injection Model predstavljen je Kirchoffovim zakonima. Snaga na vodu jednaka je (10):

$$S_{mn} = U_m^2 Y_{mn}^* - U_m U_n^* Y_{mn}^* \quad (10)$$

S obzirom na to da je navedeni izraz nelinearan i nekonveksan, uvode se nove varijable U_{ii} i U_{ij} koje su definirane kao (11) i (12):

$$U_{mm} = U_m^2 \quad (11)$$

$$U_{mn} = U_m U_n^* \quad (12)$$

Varijabla U predstavlja matricu dimenzija $n \times n$ (gdje je n broj čvorišta u sustava). Elementi glavne dijagonale matrice U definirani su kao kvadratne vrijednosti varijable amplitude napona na pojedinom čvorištu m (9). Ostali elementi matrice definiraju se pomoću (12) ukoliko postoji vod između čvorišta m i n , inače su 0. Matrica U mora biti pozitivno semidefinitna (13) i rang matrice mora biti 1 (14):

$$U \geq 0 \quad (13)$$

$$\text{rang } U = 1 \quad (14)$$

gdje je U matrica čiji su elementi definirani pomoću (11) i (12). Jednadžba (14) je nekonveksna te se zbog toga izostavlja. Nakon što je rješenje dobiveno iz relaksiranog problema, provjera se rang matrice U i ukoliko je zadovoljen izraz (14) rješenje je ujedno i optimalno rješenje početnog problema. Slijedi da se snaga na vodu može zapisati kao (15):

$$S_{mn} = U_{mm}Y_{mn}^* - U_{mn}Y_{mn}^* \quad (15)$$

S obzirom na to da je varijabla U_{mn} kompleksna, može se zapisati kao zbroj realnog i imaginarnog dijela (16):

$$U_{mn} = Re_{mn} + jIm_{mn} \quad (16)$$

pri čemu su Re_{mn} i Im_{mn} jednaki (17) i (18):

$$Re_{mn} = U_m U_n \cos(\theta_m - \theta_n) \quad (17)$$

$$Im_{mn} = U_m U_n \sin(\theta_m - \theta_n) \quad (18)$$

Pozitivna semidefinitnost će biti zadovoljena ako su sve determinante matrice veće ili jednake nuli. SOCP relaksacija navedeni izraz svodi na pozitivnu semidefinitnost determinanti prvog i drugog reda. Izraz (19) vrijedi za svaku determinantu drugog reda matrice U oblika:

$$\begin{vmatrix} U_{mm} & U_{mn} \\ U_{mn}^* & U_{nn} \end{vmatrix} \geq 0 \quad (19)$$

pri čemu je $U_{mn}^* = U_{mn}$. U konačnici dobiva se izraz (20):

$$|U_{mn}|^2 \leq U_{mm}U_{nn} \quad (20)$$

koji je jednak (21):

$$Re_{mn}^2 + Im_{mn}^2 \leq U_{mm}U_{nn} \quad (21)$$

te izražen u standardnom SOCP zapisu kao (22):

$$\left\| \begin{bmatrix} 2Re_{mn} \\ 2Im_{mn} \\ U_{mm} - U_{nn} \end{bmatrix} \right\|_2 \leq U_{mm} + U_{nn} \quad (22)$$

Nužan i dovoljan uvjet da matrica bude pozitivno semidefinitna je da su sve njezine glavne minore pozitivne. Matrica dimenzija $n \times n$ ima $2^n - 1$ glavnih minora [18]. Ukoliko je riječ o matrici dimenzija 3×3 , postoji 7 minora koje moraju biti pozitivne. Izraz (13) se stoga svodi na sljedeće: pozitivnost minora prvog reda $U_{11}, U_{22}, U_{33} \geq 0$, izraz (19) za sve minore drugog reda (ukupno 3) te determinanta čitave matrice mora biti pozitivna.

6.2. DistFlow Model (Branch Flow Model)

DistFlow Model (Branch Flow Model) uzima u obzir kvadratne vrijednosti Ohmovog zakona (23):

$$U_n^2 = |U_n|^2 = |U_m - I_{mn}Z_{mn}|^2 \quad (23a)$$

$$|U_n|^2 = |U_m|^2 - 2(r_{mn}P_{mn} + x_{mn}Q_{mn}) + |I_{mn}|^2(r_{mn}^2 + x_{mn}^2) \quad (23b)$$

Jednadžba (23b) je nelinearna i nekonveksna te se uvode nove varijable (24), (25), (26) koje predstavljaju kvadrat apsolutne vrijednosti kompleksnih varijabli, odnosno kvadrat amplitude varijable:

$$u_m = |U_m|^2 \quad (24)$$

$$u_n = |U_n|^2 \quad (25)$$

$$l_{mn} = |I_{mn}|^2 \quad (26)$$

te izraz (23b) prelazi u (27):

$$u_n = u_m - 2(r_{mn}P_{mn} + x_{mn}Q_{mn}) + l_{mn}(r_{mn}^2 + x_{mn}^2) \quad (27)$$

Struja I_{km} jednaka je (28):

$$|I_{mn}|^2 = \frac{|S_{mn}|^2}{|U_m|^2} \quad (28)$$

Uvođenjem varijabli (24)-(26), izraz (28) prelazi u (29):

$$l_{mn} = \frac{P_{mn}^2 + Q_{mn}^2}{u_m} \quad (29)$$

Obrnutom SOCP relaksacijom izraz (29) prelazi u konveksnu funkciju (30):

$$P_{mn}^2 + Q_{mn}^2 \leq l_{mn}u_m \quad (30)$$

6.3. Model s prognoziranim vrijednostima

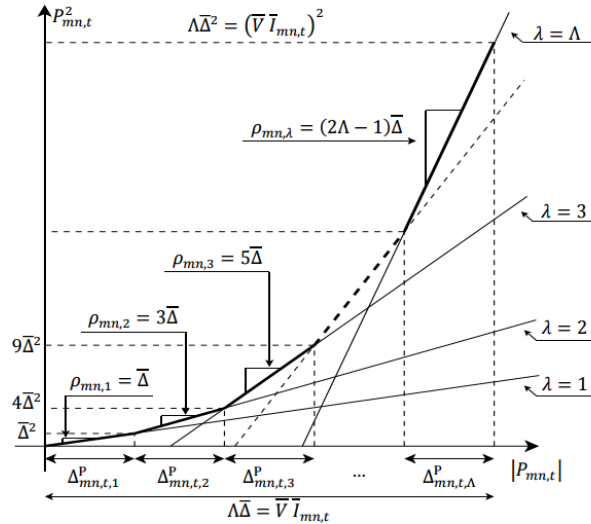
Autor u [2] uvodi još jedan model u kojem se umnožak varijabli zamjenjuje umnoškom varijable i njezine estimirane vrijednosti. Prognozirane vrijednosti uzete su iz povijesnih podataka. Struja u (28) i (29) predstavljena kao omjer kvadratnog zbroja djelatne i jalove snage na vodu te kvadratnog napona, definira se kao (31):

$$l_{mn} = \frac{P_{mn}P_{mn(est)} + Q_{mn}Q_{mn(est)}}{U_{mn(est)}^2} \quad (31)$$

pri čemu se u svim jednadžbama kvadratna vrijednost struje može zamijeniti izrazom (31). Funkcija (31) je linearna s varijablama l_{mn}, P_{mn}, Q_{mn} , dok su $P_{mn(est)}, Q_{mn(est)}, U_{mn(est)}^2$ samo konstante u jednadžbama (procijenjene vrijednosti koje više nisu varijable, nego konstante). SOCP relaksacija (30) zamijenjena je s (32):

$$\sum_{\gamma} \rho_{mn,\gamma} (\Delta_{mn,\gamma}^P + \Delta_{mn,\gamma}^Q) \leq u_m \overline{l_{mn}^2} \quad (32)$$

pri čemu zbroj kvadrata varijabli jalove i djelatne snage s lijeve strane izraza (30) je zamijenjen linearnom funkcijom po dijelovima, a funkcija s desne strane (umnožak $u_m \overline{l_{mn}^2}$) je linearana jer je $\overline{l_{mn}^2}$ maksimalna vrijednost kvadrata struje na vodu (konstanta, a ne varijabla). Konstanta $\rho_{mn,\gamma}$ je nagib pravca, dok varijable $\Delta_{mn,\gamma}^P, \Delta_{mn,\gamma}^Q$ aproksimiraju vrijednost varijabli P_{mn}^2, Q_{mn}^2 u γ intervalu. Linearizacija kvadratne funkcije radne snage dana je slikom 3:



Slika 3 Linearizacija kvadratne funkcije radne snage [2]

7. OPTIIMIZACIJA

Optimizacija je određivanje minimalne (ili maksimalne) vrijednosti funkcije uz poštivanje određenih ograničenja (uvjeta) (33):

$$\begin{aligned} & \min f(x) \\ \text{uz uvjete: } & g(x) = 0 \\ & h(x) \leq 0 \end{aligned} \quad (33)$$

pri čemu je $f(x)$ funkcija cilja, $g(x)$ uvjeti jednakosti, a $h(x)$ uvjeti nejednakosti. Određivanje minimalne vrijednosti funkcije $f(x)$ jednako je određivanje maksimalne vrijednosti funkcije $-f(x)$.

Uzmemo li konkretan primjer elektroenergetskog sustava, funkcija $g(x)$ predstavlja jednakost proizvodnje i potrošnje u svakom trenutku, dok funkcija $h(x)$ ograničava vrijednosti napona unutar granica $\pm 10\%$ od nazivne vrijednosti ili ograničenje snage na vodu.

Funkcije cilja mogu biti brojne:

1. minimizacija gubitaka radne snage (34):

$$P_{loss} = \sum_{g \in G} P_g - \sum_{l \in L} P_l \quad (34)$$

gdje varijabla P_{loss} predstavlja gubitke, P_g proizvodnju pojedinog generatora (G je skup svih generatora u sustavu), P_l potrošnju u sustavu (L je ukupna potrošnja sustava).

2. minimizacija troškova proizvodnje (35):

$$\text{total cost} \sum_{g \in G} (\text{cost}_{startup_g} + \text{cost}_{fiksni_g} + \text{cost}_{varijabilni_g}) \quad (35)$$

total cost je ukupan trošak proizvodnje koji se računa kao suma svih troškova svakog pojedinog generatora (troškovi pokretanja $\text{cost}_{startup_g}$, fiksni troškovi cost_{fiksni_g} i varijabilni troškovi $\text{cost}_{varijabilni_g}$)

3. maksimizacija proizvodnje obnovljivih izvora (minimizacija smanjenja proizvodnje obnovljivih izvora) (36):

$$P_{DG_{total}} = \sum_{g \in DG} P_g \quad (36)$$

$P_{DG_{total}}$ je ukupna proizvodnja iz obnovljivih izvora, dok je DG skup svih obnovljivih izvora.

8. ZAKLJUČAK

Sve veća integracija distribuirani, često obnovljivih, izvora energije u distribucijsku mrežu, ali i pružatelja usluga fleksibilnosti (spremnici energije, upravljiva potrošnja, električni automobili) zahtijevaju aktivno upravljanje mrežom. Za razliku od tradicionalnih distribucijskih mreža u kojima je smjer snage uvijek jednosmjernan (od prijenosne mreže prema krajnjim korisnicima), aktivno vođenje mreže uzorkovat će i pojavu reverznih tokova snaga. Zbog nesigurne i promjenjive proizvodnje obnovljivih izvora energije, baterijski spremnici i upravljiva potrošnja omogućit će pružanje usluga rezerve i uravnoteženja te pomoći u regulaciji napona i frekvencije, smanjiti gubitke u mreži ili poravnati dnevni dijagram opterećenja. Modeliranje dvosmjernih tokova snaga u distribucijskim mrežama opisuje se skupom nelinearnih i nekonveksnih jednadžbi optimalnih tokova snaga, što znači da je izuzetno teško naći optimalna rješenja. Iz istog razloga se često koriste heurističke metode, koje iako daju dovoljno precizna rješenja, ne garantiraju globalni optimum te takvi algoritmi moraju biti podešeni za specifične slučajeve. Upravo iz navedenih razloga sve veći naglasak se stavlja na razvoj metoda kojima se optimalni tokovi snaga u mreži mogu prikazati kao konveksne funkcije koje se mogu riješiti u polinomnom vremenu, a garantiraju globalni optimum. U rad je dan pregled metoda i postupaka relaksacije te su objašnjenje prednosti i mane ovakvih postupaka.

9. ZAHVALE

Istraživanje je financirano u sklopu projekta SUCCESS Hrvatske zaklade za znanost, koji se financira u sklopu Programa Vlade Republike Hrvatske za poticanje istraživačkih i razvojnih aktivnosti u području klimatskih promjena za razdoblje od 2015. do 2016. godine.

Istraživanje je provedeno u sklopu projekta 3smart DTP1-1-502-3.2 I koji su financira Europska unija kroz EFRR i IPA fond.

10. LITERATURA

- [1] Q. Gemine, "Active Network Management for Electrical Distribution Systems, System and Control", 2016.
- [2] J.F.Franco, "AC OPF for Smart Distribution Networks: An Efficient and Robust Quadratic Approach", IEEE Transactions on Smart Grid, 2017.
- [3] S. Carr, G. Premier, A. Guwy, R. Dinsdale, J. Maddy, "Energy storage for active network management on electricity distribution networks with wind power," IET Renew. Power Gener., vol. 8, no. 3, pp. 249–259, Apr. 2014
- [4] S. Ghasemi and J. Moshtagh, "A novel codification and modified heuristic approaches for optimal reconfiguration of distribution networks considering losses cost and cost benefit from voltage profile improvement," Appl. Soft Comput., vol. 25, pp. 360–368, Dec. 2014
- [5] A.Soroudi, P. Siano, A. Keane, "Optimal DR and ESS Scheduling for Distribution Losses Payments Minimization Under Electricity Price Uncertainty", IEEE Transactions on smart grid, vol. 7, no. 1, January 2016
- [6] M. Nick, R. Cherkaoui, J.-Y. Le Boudec, M. Paolone, "An Exact Convex Formulation of Optimal Power Flow in Radial Distribution Networks Including Transverse Components", Cornell University Library
- [7] D. K. Molzahn, I. A. Hiskens, "Convex Relaxations of Optimal Power Flow Problems: An Illustrative Example", IEEE Transactions on circuits and systems—i: regular papers, VOL. 63, NO. 5, MAY 2016
- [8] L. Gan, N. Li, U. Topcu, and S. H. Low, "Exact Convex Relaxation of Optimal Power Flow in Radial Networks," IEEE Trans. Automat. Contr., vol.60, no.1, pp. 72–87, Jan. 2015.

- [9] D. K. Molzahn, J.T. Holzer, B. C. Lesieutre, C. L. DeMarco, "Implementation of a Large-Scale Optimal Power Flow Solver Based on Semidefinite Programming", IEEE Transactions on power systems, vol. 28, no.4, November 2013
- [10] S. Nykamp, A. Molderink, J. L. Hurink, and G. J. Smit, "Storage operation for peak shaving of distributed pv and wind generation", Innovative Smart Grid Technologies (ISGT), 2013 IEEE PES, IEEE, 2013, pp. 1–6.
- [11] P. Mercier, R. Cherkaoui, and A. Oudalov, "Optimizing a battery energy storage system for frequency control application in an isolated power system", Power Systems, IEEE Transactions on, vol. 24, no. 3, pp. 1469– 1477, 2009.
- [12] A. Oudalov, R. Cherkaoui, and A. Beguin, "Sizing and optimal operation of battery energy storage system for peak shaving application", in Power Tech, 2007 IEEE Lausanne, IEEE, 2007, pp. 621– 625.
- [13] A.Y.S.Lam, B.Zhang, A.Dominguez-Garcia, and D.Tse,"Optimal distributed voltage regulation in power distribution networks," IEEE Trans. Power Syst.
- [14] K. Turitsyn, P. Sulc, S. Backhaus, and M. Chertkov, "Local control of reactive power by distributed photovoltaic generators," in Proc. IEEE SmartGridComm, 2010, pp. 79–84.
- [15] D.K.Molzahn,B.C.Lesieutre,and C.L.DeMarco, "A sufficient condition for power flow insolvability with applications to voltage stability margins," IEEE Transactions on power systems, VOL. 28, NO. 3, AUGUST 2013
- [16] A. Zakariazadeh, O. Homaei, S. Jadid, and P. Siano, "A new approach for real time voltage control using demand response in an automated distribution system," Appl. Energy, vol. 117, pp. 157–166, Mar. 2014.
- [17] F.Capitanescu, L. F. Ochoa, Harag Margossian, and N. D. Hatziaargyriou, "Assessing the Potential of Network Reconfiguration to Improve Distributed Generation Hosting Capacity in Active Distribution Systems", IEEE Transactions on power systems, VOL.30, NO.1, JANUARY 2015
- [18] Z. Xu, J. Ostergaard, and M. Togeby, "Demand as frequency controlled reserve," IEEE Transactions on power systems, vol. 26, no. 3, pp. 1062– 1071, 2011.
- [19] J.A.Taylor: "Convex Optimization of Power Systems", Cambridge University Press, 2015
- [20] S. Huang, Q. Wu, J. Wang, H. Zhao, "A Sufficient Condition on Convex Relaxation of AC Optimal Power Flow in Distribution Networks", IEEE Transactions on Power Systems, vol. 32, no. 2, March 2017
- [21] C., Hassan L. Hijazi, and P. Van Hentenryck, "The QC Relaxation: A Theoretical and Computational Study on Optimal Power Flow", IEEE Transactions on Power Systems, vol.31, no.4, July 2016, pp. 3008-3018.
- [22] S.H. Low, "Convex Relaxation of Optimal Power Flow: A Tutorial", 2013 IREP Symposium-Bulk Power System Dynamics and Control -IX (IREP), August 25-30, 2013
- [23] Q. Peng and S. H. Low, "Distributed Optimal Power Flow Algorithm for Radial Networks, I: Balanced Single Phase Case ", IEEE Transactions on Smart Grid, March 2016, pp 1-11.
- [24] L. Gan, N.Li, U. Topcu, S. H. Low, "Exact Convex Relaxation of Optimal Power Flow in Radial Networks", IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 60, no. 1, pp 72-87, January 2015
- [25] H. Hijazi, C. Coffrin, P. Van Hentenryck, "Polynomial SDP Cuts for Optimal Power Flow", Power Systems Computation Conference (PSCC), June 2016
- [26] F. Geth, "Optimal Power Flow Formulations: Trade-Offs in Tractability, Accuracy and Numerical Aspects",2016
- [27] A. Ben-Tal and A. Nemirovski, "On polyhedral approximations of the second-order cone," Mathematics of Operations Research, vol. 26, no. 2, pp. pp. 193–205, 2001
- [28] C.Coffrin, H. L. Hijazi, P. Van Henernryck, "Network Flow and Copper Plate Relaxations for AC Transmission Systems", Power Systems Computation Conference, 2016
- [29] R. A. Jabr, "Radial Distribution Load Flow Using Conic Programming," IEEE Trans. Power Syst., vol.21, no.3, pp. 1458–1459, Aug. 2006
- [30] X. Bai, H. Wei, K. Fujisawa, and Y. Wang, "Semidefinite programming for optimal power flow problems," Int. J. Electr. Power Energy Syst., vol.30, no.6–7, pp. 383–392, Jul. 2008.
- [31] E. Dall'Anese, H. Zhu, G. B. Giannakis, "Distributed Optimal Power Flow for Smart Microgrids", IEEE Transactions on Smart Grid, volume: 4, issue: 3, pp 1464 – 1475, Sept. 2013
- [32] B. Zhang and D. Tse, "Geometry of feasible injection region of power networks," in Proc. 2011 49th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing (Allerton), pp. 1508–1515.
- [33] B. Zhang and D. Tse, "Geometry of injection regions of power networks," IEEE Trans. Power Syst., vol.28, no.2, pp. 788–797, May 2013.